

УДК 517.988.6

УПЛОТНЯЮЩИЕ ВОЗМУЩЕНИЯ СЮРЪЕКТИВНЫХ ОПЕРАТОРОВ. НЕКОТОРЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ.

© Б.Д. Гельман, С.Н. Афонина

Ключевые слова: мера некомпактности; сюръективный оператор; уплотняющее отображение.

Данная статья посвящена изучению уплотняющих возмущений замкнутых линейных сюръективных операторов. Полученные теоремы применяются к изучению некоторых классов уравнений нейтрального типа.

Пусть E_1, E_2, E_3 — банаховы пространства, $A: D(A) \subset E_1 \rightarrow E_2$ — замкнутый линейный сюръективный оператор, $\Gamma(A) \subset E_1 \times E_2$ — график оператора A , $t: \Gamma(A) \rightarrow E_1$ — проекция на область определения оператора A , т. е. $t(x, y) = x$.

Пусть в E_2 задана монотонная, несингулярная, алгебраически полуаддитивная, вещественная, правильная мера некомпактности ψ .

О п р е д е л е н и е 1. Будем говорить, что отображение $f: D(f) \subset E_1 \rightarrow E_2$ является (A, ψ) -уплотняющим, если:

- 1) для любого ограниченного множества $\Omega \subset (D(A) \cap D(f))$ из неравенства $\psi(A(\Omega)) \leq \psi(f(\Omega))$ следует, что $\psi(A(\Omega)) = 0$;
- 2) если $X = t^{-1}(D(f))$, то композиция $f \circ t: X \rightarrow E_2$ является непрерывным отображением.

Пусть $B: D(B) \subset E_1 \rightarrow E_3$ — произвольный линейный оператор.

О п р е д е л е н и е 2. Будем говорить, что оператор B подчинен оператору A , если:

- (1) $D(A) \subset D(B)$;
- (2) для любого $x \in D(A)$ справедливо неравенство $\|A(x)\| \geq \|B(x)\|$.

Пусть отображение $g: X \subset D(A) \rightarrow E_2$.

О п р е д е л е н и е 3. Будем говорить, что отображение g — вполне непрерывно по модулю отображения A (или A -вполне непрерывно), если оно непрерывно и для любого ограниченного множества $Q \subset E_2$, и любого ограниченного множества $M \subset X$. Множество $g(M \cap A^{-1}(Q))$ является компактным в E_2 . Пустое множество по определению считается компактным.

Рассмотрим пример (A, ψ) -уплотняющего отображения.

П р и м е р 1. Предположим, что оператор B подчинен оператору A , множество X — ограниченное подмножество в $D(A)$ такое, что множество $A(X)$ также ограничено в E_2 . Пусть $\varphi: X \times E_3 \rightarrow E_2$ — непрерывное отображение, удовлетворяющее следующим условиям:

- 1) существует такое число $k \in (0, 1)$, что для любой точки $x \in X$ и любых $y_1, y_2 \in E_3$ справедливо неравенство $\|\varphi(x, y_1) - \varphi(x, y_2)\| \leq k\|y_1 - y_2\|$;
- 2) для любого $y \in E_3$ отображение $\varphi(\cdot, y): X \rightarrow E_2$ является A -вполне непрерывным.

Рассмотрим отображение $f: X \rightarrow E_2$, $f(x) = \varphi(x, B(x))$. Пусть в пространстве E_2 задана мера некомпактности Хаусдорфа χ .

У т в е р ж д е н и е 1. При сделанных предположениях отображение f является (A, χ) -уплотняющим отображением.

Имеет место следующая теорема. Пусть $A: D(A) \subset E_1 \rightarrow E_2$ — замкнутый линейный сюръективный оператор. Пусть в E_2 задана монотонная, несингулярная, алгебраически полуаддитивная, вещественная, правильная мера некомпактности ψ .

Пусть $x_0 \in D(A)$, $B_R[x_0] \subset E_1$ — замкнутый шар радиуса R с центром в x_0 . Рассмотрим множество

$$P = \{x \in D(A) \cap B_R[x_0] \mid \|A(x) - A(x_0)\| \leq m\},$$

где m некоторое положительное число. Пусть отображение $f: P \rightarrow E_2$ является (A, ψ) -уплотняющим отображением.

Т е о р е м а 1. *Если существует такое число $l > \max\{\|A^{-1}\|, \frac{R}{m}\}$, что для любого $x \in P$ справедливо неравенство $\|A(x_0) - f(x)\| \leq \frac{R}{l}$, то уравнение $A(x) = f(x)$ имеет решение.*

Рассмотрим некоторые следствия, вытекающие из теоремы 1.

Пусть $A: D(A) \subset E_1 \rightarrow E_2$ — замкнутый сюръективный линейный оператор, $B: D(B) \subset E_1 \rightarrow E_3$ — линейный оператор, подчиненный оператору A , в пространстве E_2 задана мера некомпактности Хаусдорфа χ , множество P такое же как и ранее.

Пусть $\varphi: P \times E_3 \rightarrow E_2$ — непрерывное отображение, удовлетворяющее следующим условиям:

- 1) существует такое число $k \in (0, 1)$, что для любой точки $x \in P$ и любых $y_1, y_2 \in E_3$ справедливо неравенство $\|\varphi(x, y_1) - \varphi(x, y_2)\| \leq k\|y_1 - y_2\|$;
- 2) для любого $y \in E_3$ отображение $\varphi(\cdot, y): P \rightarrow E_2$ является A -вполне непрерывным.

С л е д с т в и е 1. *Если для любой точки $x \in P$ существует число $l > \max\{\|A^{-1}\|, \frac{R}{m}\}$ такое, что $\|A(x_0) - \varphi(x, B(x))\| \leq \frac{R}{l}$, то уравнение $A(x) = \varphi(x, B(x))$ имеет решение на множестве P .*

Пусть операторы A, B такие же как и раньше. Пусть $\varphi: E_1 \times E_3 \rightarrow E_2$ — непрерывное отображение, удовлетворяющее следующим условиям:

- 1) существует такое число $k \in (0, 1)$, что для любой точки $x \in E_1$ и любых $y_1, y_2 \in E_3$ справедливо неравенство $\|\varphi(x, y_1) - \varphi(x, y_2)\| \leq k\|y_1 - y_2\|$;
- 2) для любого $y \in E_3$ отображение $\varphi(\cdot, y): E_1 \rightarrow E_2$ является A -вполне непрерывным.

Пусть в пространстве E_2 задана мера некомпактности Хаусдорфа χ .

Т е о р е м а 2. *Если существуют такие константы $\gamma \geq 0$ и $\beta \geq 0$, что для любой точки $x \in E_1$, $y \in E_3$ справедливо неравенство $\|\varphi(x, y)\| \leq \gamma(\|x\| + \|y\|) + \beta$ и произведение $\gamma(\|A^{-1}\| + 1) < 1$. Тогда уравнение $A(x) = \varphi(x, B(x))$ имеет решение.*

Рассмотрим приложение в теории дифференциальных уравнений, в которых применяются полученные теоремы. Пусть $[0, \tau]$ отрезок числовой прямой, $\lambda, \mu: [0, \tau] \rightarrow [0, \tau]$ — произвольные непрерывные функции, $g: [0, \tau] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ непрерывное отображение, удовлетворяющее следующему условию: (g1) существует такое число $k \in (0, 1)$, что для любых $t \in [0, \tau]$, $x \in \mathbb{R}^n$ и $y_1, y_2 \in \mathbb{R}^n$ справедливо неравенство $\|g(t, x, y_1) - g(t, x, y_2)\| \leq k\|y_1 - y_2\|$. Рассмотрим следующую задачу:

$$x'(t) = g(t, x(\lambda(t)), x'(\mu(t))), \quad (1)$$

$$x(0) = 0. \quad (2)$$

Т е о р е м а 3. *Если существуют такие константы $p \geq 0$ и $s \geq 0$ что для любого $t \in [0, \tau]$ и любых функций $x, y \in C_{[0, \tau]}$ справедливо неравенство $\|g(t, x(t), y(t))\| \leq p(\|x(t)\| + \|y(t)\|) + s$ и произведение $p(\tau + 1) < 1$. Тогда задача (1), (2) имеет решение на промежутке $[0, \tau]$.*

ЛИТЕРАТУРА

1. Калабухова С.Н. Об отображениях, уплотняющих относительно замкнутого оператора // Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки. 2011. Т. 16. Вып. 4. С. 1092-1094.
2. Gel'man B.D., Kalabukhova S.N. On Condensing Perturbations of Closed Linear Surjective Operators // Global and Stochastic Analysis. 2012. V. 2, № 1.

Gelman B.D., Afonina S.N. SEALING DISTURBANCE SURJECTIVE. SOME APPLICATIONS
This work is devoted to the study of condensing perturbations of closed linear surjective operators. Some received theorems are applied to the study of some neutral type level classes.

Key words: measure noncompactness; surjective operator; condensing map.

УДК 517.986.6

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ВЫРОЖДЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ

© Б.Д. Гельман, А.В. Завьялова

Ключевые слова: сюръективный оператор; непрерывный линейный оператор; многозначные уплотняющие отображения; дифференциальные включения.

Данная статья посвящена изучению многозначных уплотняющих возмущений непрерывных линейных сюръективных операторов. В ней рассматривается теорема о разрешимости одного класса операторных включений с сюръективными операторами. Полученная теорема применяется для изучения разрешимости вырожденных дифференциальных включений.

Пусть E, E_0 – банаховы пространства, $A: E \rightarrow E_0$ – ограниченный линейный сюръективный оператор, $F: D(F) \subset E \rightarrow K_v(E_0)$ – полунепрерывное сверху многозначное отображение. Пусть в E_0 задана монотонная, несингулярная, алгебраически полуаддитивная, вещественная, правильная мера некомпактности ψ .

О п р е д е л е н и е 1. *Отображение F называется (A, ψ) -уплотняющим, если для любого ограниченного множества $Q \subset D(F)$ из неравенства $\psi(F(Q)) \geq \psi(A(Q))$ вытекает равенство $\psi(A(Q)) = 0$.*

Пусть $x_0 \in E$ – некоторая точка, $B_R[x_0]$ – замкнутый шар радиуса R с центром в x_0 , $F: B_R[x_0] \rightarrow K_v(E_0)$ – многозначное (A, ψ) -уплотняющее отображение.

Рассмотрим включение $A(x) \in F(x)$. Пусть $N(A, F)$ – множество решений этого включения. Имеет место следующая теорема (см. [1]).

Т е о р е м а 1. *Если существует такое число $k > \|A^{-1}\|$, что для любой точки $x \in B_R[x_0]$ справедливо неравенство*

$$\min_{u \in F(x)} \|A(x_0) - u\| \leq \frac{R}{k},$$

то $N(A, F) \neq \emptyset$.

Рассмотрим приложение этой теоремы к изучению разрешимости одного класса вырожденных дифференциальных включений в банаховом пространстве.

Пусть E_1, E_2, E_3 – банаховы пространства, $A: E_1 \rightarrow E_2$ – непрерывный линейный оператор, $B: E_1 \rightarrow E_3$ – непрерывный линейный оператор, подчиненный оператору A , т.е. $\|B(x)\| \leq \|A(x)\|$ для любого $x \in E_1$. Тогда естественно определяются отображения $\hat{A}: C_{([0, T], E_1)} \rightarrow C_{([0, T], E_2)}$ и $\hat{B}: C_{([0, T], E_1)} \rightarrow C_{([0, T], E_3)}$ по следующему правилу:

$$\hat{A}(x)(t) = A(x(t)), \quad \hat{B}(x)(t) = B(x(t)).$$